BARISAN SISI ALAS PIRAMIDA HEPTAGONAL

Dessy Andriani[1], Mashadi[2], Sri Gemawati[3]

[1)]Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; dessyandrianiok@gmail.com
[2)]Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; Mashadi.mat@gmail.com
[3)]Magister Matematika, FMIPA, Universitas Riau; Gemawati.sri@gmail.com

Abstrak

Barisan sisi alas merupakan barisan yang diperoleh berdasarkan susunan jumlah bilangan bulat pada salah satu sisi alas bangun ruang piramida atau limas. Dalam tulisan ini akan dibahas barisan sisi alas pada piramida heptagonal dengan membuat sketsa tiga dimensi. Sehingga diperoleh hasil tujuh barisan bilangan sisi alas piramida heptagonal. Jumlah barisan sisi alas pada piramida heptagonal sama dengan jumlah sisi pada bidang alas piramida heptagonal.

Kata kunci: barisan bilangan, barisan sisi alas , barisan sisi alas piramida heptagonal,

Abstract

The base line is a sequence obtained based on the arrangement of the number of integers on either side of the pyramid or pyramid space. In this paper we will discuss the base row of the heptagonal pyramid by using sketching thre dimensions. That the results obtained seven rows of pyramid base side numbers of the heptagonal. The number of sequences of base side on the pyramid is equal to the number of pyramidal base facets.

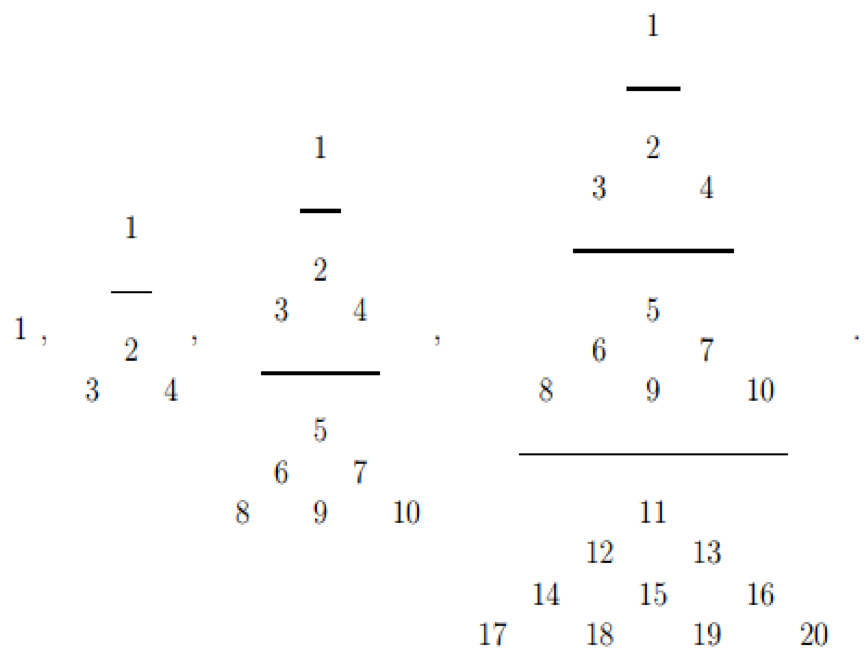
Keywords: *interger sequences, rows of base sides, heptagon pyramidal base rows*

1. Pendahuluan

Barisan dan deret merupakan salah satu bagian dalam bidang ilmu matematika yang mempelajari tentang bilangan, Aksoy (2010) dan Potter (1998) mengatakan bahwa barisan adalah suatu fungsi dengan domainnya adalah himpunan bilangan asli dan daerah hasil adalah himpunan bilangan real. Sedangkan barisan bilangan merupakan suatu susunan bilangan yang dibentuk menurut suatu urutan tertentu. Urutan tertentu yang dimaksud adalah urutan mulai dari suku pertama U_1, suku kedua U_2, suku ketiga U_3, dan seterusnya sampai dengan suku ke-n U_n. Kemudian Mashadi dan Abdul (2017) mendefenisikan barisan bilangan real sebagai fungsi pada himpunan bilangan asli N dengan daerah jelajah termuat didalam himpunan bilangan real R.

Beberapa referensi telah membahas tentang barisan bilangan diantaranya Thompson, dkk (2001) yang membahas barisan aritmatika dan barisan geometri dan Azrida, dkk (2014) yang membahas mengenai barisan bertingkat. Serta Gulliver (2006), Gulliver (2007), Gulliver (2010), Gulliver (2011) yang membahas barisan sudut, barisan sisi alas dan jumlah pada bidang alas piramida setiap tingkatnya pada piramida tetrahedron, piramida, piramida pentagonal dan piramida hexagonal.

Beberapa barisan yang diperoleh berdasarkan susunan bilangan bulat pada tetrahedron atau piramida segitiga. Perhatikan gambar dibawah:



Gambar 1: *Tetrahedral Pyramids of Integers*

Berdasarkan gambar 1 diperoleh beberapa barisan, yaitu barisan sudut, barisan sisi alas, dan barisan barisan bidang alas setiap tingkatnya. Barisan sudut tetrahedron yang diperoleh Gulliver (2006) sebagai berikut:

1,2,5,11,21, … $\qquad s_n = \frac{1}{6}(n+2)(n^2-2n+3)$ $\qquad$ (1)

1,3,8,17,31, … $\qquad s_n = \frac{1}{6}(n^3+3n^2-4n+6)$ $\qquad$ (2)

1,4,10,20,35, … $\qquad s_n = \frac{1}{6}(n^3+3n^2-4n+6)$ $\qquad$ (3)

Persamaan (1), (2), (3) telah terdaftar dalam Sloane dengan nomor seri A050407, A105163 and A000292. Selanjutnya Gulliver (2007) memperoleh barisan sisi alas tetrahedron

1,5,19,54,125, … $\qquad S_n = \frac{1}{6}(n^3+n^2-n+5)$

1,6,22,60,135 … $\qquad S_n = \frac{1}{6}n(n+1)(n^2+2)$

1,5,7,27,74,165 … $\qquad S_n = \frac{1}{6}n(n^3+3n^2-n+3)$

Barisan baru yang diperoleh dalam Gulliver (2007) juga diperoleh menggunakan gambar berikut:

$$1\ ,\quad \frac{1}{\begin{matrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{matrix}}\ ,\quad \frac{1}{\dfrac{\begin{matrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{matrix}}{\begin{matrix}6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11\\ 12 & 13 & 14\end{matrix}}}\ ,\quad \frac{1}{\dfrac{\begin{matrix}2 & 3\\ 4 & 5\end{matrix}}{\dfrac{\begin{matrix}6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11\\ 12 & 13 & 14\end{matrix}}{\begin{matrix}15 & 16 & 17 & 18\\ 19 & 20 & 21 & 22\\ 23 & 24 & 25 & 26\\ 27 & 28 & 29 & 30\end{matrix}}}}$$

Gambar 2: *Pyramids of Integers*

Terdapat empat barisan sisi alas untuk piramida.

1,5,21,66,165, … $\qquad S_n = \frac{1}{6}n(n^2+1)(n^2-n+3)$

1,6,27,84,205 … $\qquad S_n = \frac{1}{3}n(n^3-n+3)$

1,8,33,84,205, … $\qquad S_n = \frac{1}{3}n(n^2+3)$

$1,9,39,114,265 \ldots \qquad S_n = \frac{1}{6}n(2n^3 + 3n^2 - 2n + 3)$

Dalam Gulliver (2010) membahas barisan bilangan pada piramida pentagonal, terdapat lima barisan sisi alas pada piramida pentagonal seperti berikut:

$1,5,27,94, \ldots$

$1,7,39,130, \ldots$

$1,9,45,142, \ldots$

$1,11,51,154, \ldots$

$1,8,36,112, \ldots$

Lebih lanjut Gulliver (2011) membahas barisan lainnya, yaitu barisan sisi alas pada piramida hexagonal. Berikut barisan sisi alas piramida hexagonal:

$1,5,31,114,305, \ldots$

$1,7,45,158,405, \ldots$

$1,9,52,170,425, \ldots$

$1,11,57,182,445, \ldots$

$1,13,63,194,465, \ldots$

$1,9,43,138,345, \ldots$

Selanjutnya Putri, dkk (2018) meneliti mengenai barisan sudut pada piramida heptagonal dan octagonal serta piramida segi-*k*. Dalam artikel ini penulis tertarik membahas barisan sisi alas yang dapat dibentuk oleh piramida heptagonal, piramida octagonal, dan piramida dengan alas segi banyak. Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan salah satu barisan sisi alas pada tetrahedron, piramida, piramida pentagonal dan piramida hexagonal. Di bagian akhir dengan cara yang sama akan di bahas barisan sisi alas piramida segi-*k*.

2. Metode Penelitian

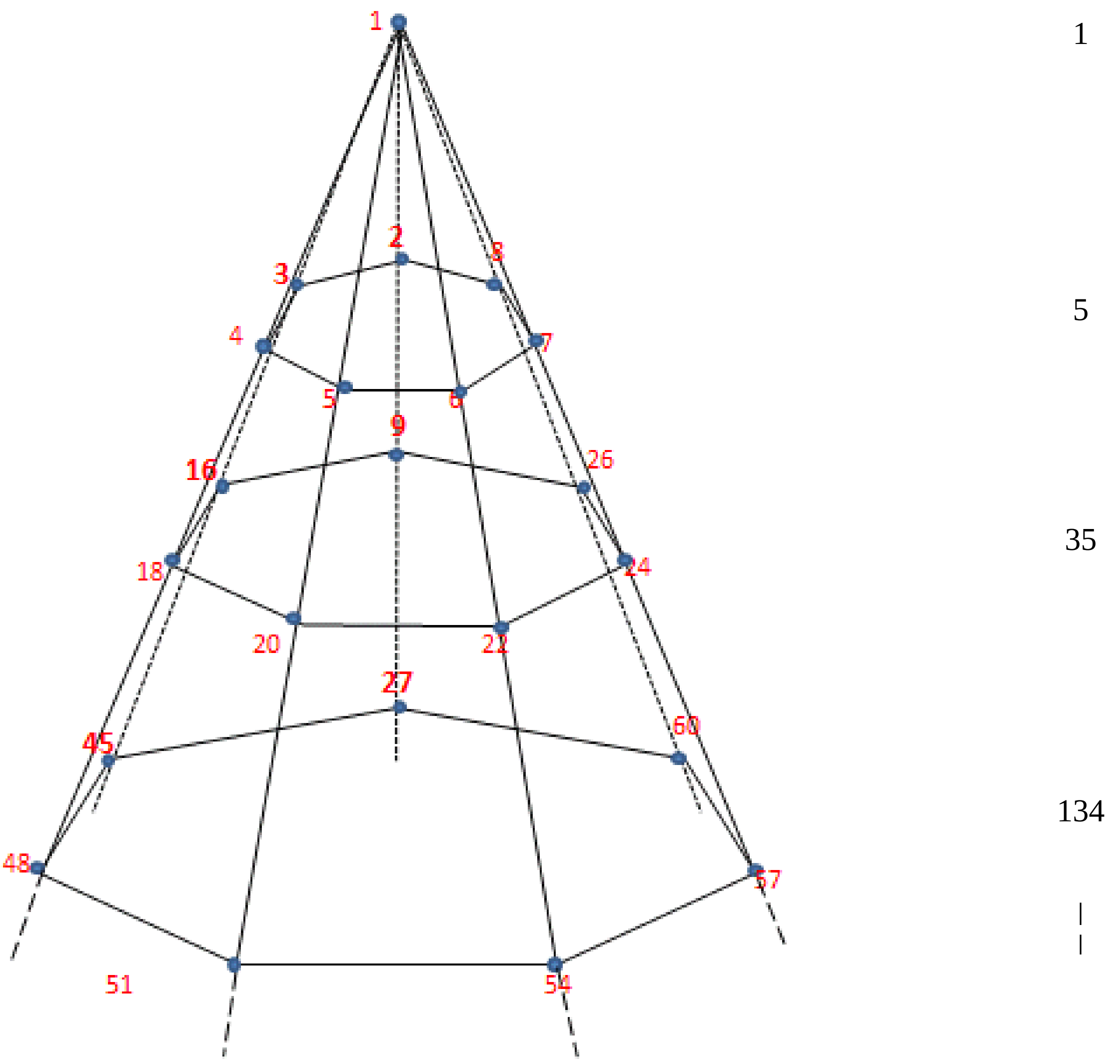
Penelitian ini berbentuk studi literature dengan mempelajarai buku teks dan nartikel yang berkaitan dengan masalah ini. Adapun langkah-langkah yang akan dilakukan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Menggambar sketsa piramida heptagonal dan piramida oktagonal

2. Mendaftarkan barisan-barisan permukaan piramida yang telah diperoleh dari jurnal Gulliver lalu menemukan pola untuk memperoleh barisan baru pada piramida segi banyak.
3. Melakukan perhitungan untuk mendapatkan rumus suku ke-n, pada barisan bilangan yang diperoleh pada piramida segi banyak
4. Membuat tabel dari barisan bilangan beserta rumus barisannya.

3. Hasil Dan Pembahasan

Barisan sisi alas piramida heptagonal dapat diperoleh dengan melihat gambar piramida heptagonal tiga dimensi berikut:



Gambar 3: Piramida Heptagonal

Dari hasil analisa piramida heptagonal pada Gambar 3, diperoleh barisan sisi alas piramida heptagonal

(i) $1, 5, 35, 134, 365, 811, \ldots$ *atau* $S_n = \frac{1}{6}(5n^4 - 7n^3 - 5n^2 + 13n)$

(ii) $1, 7, 51, 186, 485\ 1041, \ldots$ *atau* $S_n = \frac{1}{6}(5n^4 + 3n^3 - 29n^2 + 27n)$

(iii) $1, 9, 57, 198, 505, 1071, \ldots$ *atau* $S_n = \frac{1}{6}(5n^4 + 3n^3 - 23n^2 + 21n)$

Teorema 3.1 Untuk setiap barisan sisi alas pada piramida heptagonal $1,5,35,134,365, \ldots$ berlaku rumus suku ke-*n* sebagai berikut:

$$S_n = \frac{1}{6}(5n^4 - 7n^3 - 5n^2 + 13n)$$

Bukti. Teorema ini dibuktikan menggunakan induksi matematika.

$$1 + 5 + 35 + \cdots + \frac{5n^4 - 7n^3 - 5n^2 + 13n}{6} = \frac{4n^5 + 3n^4 - 14n^3 + 9n^2 + 22n}{24}$$

1. Buktikan bahwa *n* = 1 benar untuk $s_1 = 1$

$$s_1 = \frac{4n^5 + 3n^4 - 14n^3 + 9n^2 + 22n}{24}$$

$$s_1 = 1$$

2. Anggap benar untuk sebarang bilangan bulat *k*, *n* = *k*

$$1 + 5 + 35 + \cdots + \frac{5k^4 - 7k^3 - 5k^2 + 13k}{6} = \frac{4k^5 + 3k^4 - 14k^3 + 9k^2 + 22k}{24}$$

Maka akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$

$$1 + 5 + 35 + \cdots + \frac{1}{6}(5k^4 - 7k^3 - 5k^2 + 13k) + \frac{1}{6}(5(k+1)^4 - 7(k+1)^3$$

$$-5(k+1)^2 + 13(k+1)) = \frac{1}{24}(4(k+1)^5 + 3(k+1)^4 - \ 14(k+1)^3$$

$$+9(k+1)^2 + 22(k+1)$$

$$\frac{1}{24}(4k^5 + 23k^4 + 38k^3 + 25k^2 + 30k + 24) = \frac{1}{24}(4k^5 + 23k^4 + 38k^3 + 25k^2$$

$$+30k + 24)$$

Pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan benar.

Teorema 3.2 Untuk setiap barisan sisi alas pada piramida heptagonal $1, 7, 51, 186, 485\ 1041, \ldots$ berlaku rumus suku ke-*n* sebagai berikut:

$$S_n = \frac{1}{6}(5n^4 + 3n^3 - 29n^2 + 27n)$$

Bukti. Teorema ini dibuktikan menggunakan induksi matematika.

$$1 + 7 + 51 + \cdots + \frac{5n^4 + 3n^3 - 29n^2 + 27n}{6} = \frac{4n^5 + 13n^4 - 26n^3 - n^2 + 34n}{24}$$

1. Buktikan bahwa $n = 1$ benar untuk $s_1 = 1$

$$s_1 = \frac{4n^5 + 13n^4 - 26n^3 - n^2 + 34n}{24}$$

$$s_1 = 1$$

2. Anggap benar untuk sebarang bilangan bulat k, $n = k$

$$1 + 7 + 51 + \cdots + \frac{5k^4+3k^3 - 29k^2 + 27k}{6} = \frac{4k^5 + 13k^4 - 26k^3 - k^2 + 34k}{24}$$

Maka akan dibuktikan benar untuk $n = k + 1$

$$1 + 5 + 35 + \cdots + \frac{1}{6}(5k^4+3k^3 - 29k^2 + 27k) + \frac{1}{6}(5(k+1)^4 + 3(k+1)^3$$

$$-29(k+1)^2 + 27(k+1)) = \frac{1}{24}(4(k+1)^5 + 13(k+1)^4 - 26(k+1)^3$$

$$-(k+1)^2 + 34(k+1)$$

$$\frac{1}{24}(4k^5 + 33k^4 - 66k^3 + 39k^2 + 26k + 24) = \frac{1}{24}(4k^5 + 33k^4 - 66k^3$$

$$+39k^2 + 26k + 24)$$

Pernyataan benar untuk $n = k + 1$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan benar.

Teorema 3.3 Untuk setiap barisan sisi alas pada piramida heptagonal $1, 9, 57, 198, 505, 1071, ..$berlaku rumus suku ke-$n$ sebagai berikut:

$$S_n = \frac{1}{6}(5n^4 + 3n^3 - 23n^2 + 21n)$$

Bukti. Teorema ini dibuktikan menggunakan induksi matematika.

$$1 + 9 + 57 + \cdots + \frac{5n^4 + 3n^3 - 23n^2 + 21n}{6} = \frac{4n^5 + 13n^4 - 18n^3 - n^2 + 26n}{24}$$

1. Buktikan bahwa $n = 1$ benar untuk $s_1 = 1$

$$s_1 = \frac{4n^5 + 13n^4 - 18n^3 - n^2 + 26n}{24}$$

$$s_1 = 1$$

2. Anggap benar untuk sebarang bilangan bulat k, $n = k$

$$1+9+57+\cdots+\frac{5k^4+3k^3-23k^2+21k}{6}=\frac{4k^5+13k^4-18k^3-k^2+26k}{24}$$

Maka akan dibuktikan benar untuk $n=k+1$

$$1+5+35+\cdots+\frac{1}{6}(5k^4+3k^3-23k^2+21k)+\frac{1}{6}(5(k+1)^4+3(k+1)^3$$

$$-23(k+1)^2+21(k+1))=\frac{1}{24}(4(k+1)^5+13(k+1)^4-\ 18(k+1)^3$$

$$-(k+1)^2+26(k+1)$$

$$\frac{1}{24}(4k^5+33k^4+74k^3+63k^2+42k+24)=\frac{1}{24}(4k^5+33k^4+74k^3$$

$$+63k^2+42k+24)$$

Pernyataan benar untuk $n=k+1$. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pernyataan yang diberikan benar.

Dengan cara yang sama, diperoleh juga barisan sisi alas piramida heptagonal dan bentuk umum barisan sisi alas piramida heptagonal suku ke-n berikut:

(iv) $1,11,63,210,525,1101,\ldots\ atau\quad S_n=\frac{1}{6}(5n^4+3n^3-17n^2+15n)$

(v) $1,13,69,222,545,1131,\ldots\ atau\quad S_n=\frac{1}{6}(5n^4+3n^3-11n^2+9n)$

(vi) $1,15,75,234,565,1161,\ldots\ atau\quad S_n=\frac{1}{6}(5n^4+3n^3-5n^2+3n)$

(vii) $1,10,50,164,415,886,\ldots\ \ atau\quad S_n=\frac{1}{6}(5n^4-7n^3+10n^2-2n)$

4. Kesimpulan

Barisan permukaan piramida dapat diperoleh menggunakn sketsa tiga dimensi. Selanjutnya untuk mencari rumus suku ke-n dapat menggunakan dua metode yaitu menggunakan penjabaran binomial newton dan system persamaan linear. Kemudian diperoleh hasil tujuh barisan bilangan sisi alas piramida heptagonal. Jumlah barisan sisi alas pada piramida heptagonal sama dengan jumlah sisi pada bidang alas piramida heptagonal.

5. Ucapan Terima Kasih

Terima kasih kepada bapak Prof. Dr. Mashadi, M.Si. dan ibu Dr. Sri Gemawati, M.Si. selaku dosen pembimbing saya.

Daftar Pustaka

Aksoy A. G. dan Khamsi M. A. (2010). A *Problem Book in Real Analysis*. New York: Springer.

Azrida, Y, Mashadi, dan Gemawati. S. (2014). Barisan bertingkat, *Prosiding Seminar Nasional dan Kongres Indo.MS FMIPA Universitas Riau*, 12-21

Gulliver T.A. (2006). Sequences from Integer Tetrahedrons, *Int. J. Pure and Applied Math*, vol.1, 517–521.

Gulliver, T.A. (2007). Sequences from Pyramids of Integers, *Int. J. Pure and Applied Math*, vol.36 161–165.

Gulliver, T.A. (2010). Sequences from Pentagonal Pyramids of Integers, *Int. Math. Forum*, vol.5, 621-628.

Gulliver, T.A. (2011). Sequences from Hexaagonal Pyramids of Integers, *Int. Math. Forum,* Vol.6, 821-827

Mashadi dan Abdul H. (2017). *Analisis I*. Pekanbaru: UR Press.

Potter M. H. (1998). *Basic Element of Real Analysis*. New York: Springer-Verlag.

Putri, N. H. S. Mashadi dan Gemawati S. (2018). Sequences from Heptagonal Pyramid Corners of Integer, *Hikari*, Vol.13, 193-200

N. J. A. Sloane. ”On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. ”From The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences Foundation Incorporation. http://www.research.att.com/‘njas/sequences/index.html. diakses

Thompson, B. S. Bruckner, J. B. dan Bruckner A. M. (2001). *Elementary Real Analysis*. New Jersey: Prentice-Hall.