ANALISA KESTABILAN LOKAL DALAM PERTUMBUHAN MIKROORGANISME DI MEDIUM KEMOSTAT

Oleh :

Herri Sulaiman
Pendidikan Matematika FKIP Universitas Swadaya Gunung Jati

ABSTRAK

Ruang pertumbuhan dalam kemostat memungkinkan terjadinya interaksi antara mikroorganisme yang dapat dimodelkan secara matematis. Dengan adanya laju perpindahan dan fungsi respon dalam model matematis yang digambarkan, mengakibatkan sulitnya mencari solusi eksak dalam Sistem. Akan tetapi, hal yang dapat dilakukan untuk mengatasi masalah tersebut salah satunya adalah perilaku solusi diselidiki dengan cara linearisasi di sekitar titik ekuilibriumnya. Lebih lanjut dapat diketahui stabilitas Sistem melalui tahapan analisa stabilitas lokal. Dalam menganalisa stabilitas lokal, digunakan matriks Jacobian dengan syarat titik ekuilibrium tersebut hiperbolik.

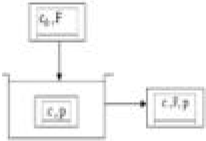
Kata kunci : *kemostat, mikroorganisme, stabilitas lokal.*

A. Latar Belakang Masalah

1. Model pertumbuhan untuk satu mikroorganisme sejenis di medium Kemostat.

Kemostat (*chemostat; chemical environment is static*) adalah suatu kultur mikroorganisme dengan mekanisme tertentu yang digunakan dalam mikrobiologi untuk memantau laju pertumbuhan mikroba. Kemostat terdiri dari dua bagian utama, yaitu reservoir nutrien yang steril dan proses pertumbuhan yang terjadi dalam medium yang steril dan diberikan nutrien agar menjadi ruang pertumbuhan, kemudian lajunya selalu dikontrol. Pengendalian nutrien merupakan faktor yang penting bagi pertumbuhan organisme dalam medium hingga mencapai konsentrasi tertentu, sehingga terjadi keseimbangan pertumbuhan organisme dalam mengkonsumsi nutrien.

Bagan di bawah ini menggambarkan diagram transfer untuk masukan dan keluaran dalam kemostat. Nutrien *(c)* yang ada di dalam reaktor dengan mikrooganisme yang berjumlah p dialiri oleh fluida dengan laju F mengangkut nutrien segar *(C0)* yang menyebabkan terjadinya pertumbuhan mikroorganisme. Mikroorganisme dan nutrien yang hanyut akan keluar melalui fluida dengan konsentrasi dan laju tertentu.



Di dalam kemostat, digunakan medium berupa fluida yang aliran keluar masuknya dijaga agar tetap stabil, sehingga volume di dalam media pertumbuhan dijaga agar konstan. Model sederhana dalam kemostat digambarkan sebagai berikut, misalkan c adalah konsentrasi nutrien, p konsentrasi mikroorganisme, dan $\mathcal{K}(c)$ adalah laju konsentrasi konsumsi nutrien oleh mikroorganisme (laju pertumbuhan). Fungsi respon umum yang pertama kali diperkenalkan oleh ***Monod*** pada tahun 1950 yang biasa digunakan adalah

$$\mathcal{K}(c) = \frac{mc}{a + c}. \qquad (1.1)$$

Dengan m dinyatakan sebagai laju maksimum konsumsi perkapita dari mikroorganisme, a dinyatakan sebagai konstanta setengah jenuh pengkonsumsian artinya banyaknya nutrien yang diperlukan untuk mencapai setengah dari laju maksimum m, dan c dinyatakan sebagai proporsi maksimum nutrien yang dimakan oleh mikroorganisme perunit waktu. Lebih lanjut diketahui $m > 0$, $a > 0$ dan diasumsikan bahwa fungsi respon $\mathcal{K}(c) = \frac{mc}{a+c}$ harus memenuhi :

i. $\mathcal{K}(0) = 0$,
ii. $\mathcal{K}(c)$ kontinu, terdiferensiabel dan $\mathcal{K}'(c) > 0$,
iii. $\mathcal{K}(c)$ mendekati nilai limit m untuk c menuju tak berhingga.

Jika c_0 adalah konsentrasi nutrien yang masuk dalam Sistem, maka persamaan diferensial yang menggambarkan interaksi nutrien dengan mikroorganisme adalah :

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= D(c_0 - c) - \frac{1}{y}\frac{mc}{a+c}p, \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{mc}{a+c}p - Dp, \end{aligned} \qquad (1.2)$$

dengan D konstanta laju aliran fluida yang keluar masuk Sistem, dan $\frac{1}{y}$ adalah konstanta pembanding antara laju pertumbuhan mikroorganisme terhadap nutrien. Dengan demikian dari persamaan turunan c menggambarkan perubahan konsentrasi nutrien setelah dilalui aliran fluida yang dikurangi oleh konsentrasi nutrien dan mikroorganisme dari hasil adanya

Jurnal Euclid, ISSN 2355-1712, vol.2, No.1, pp. 137-238

fungsi respon. Demikian halnya dengan persamaan turunan p tampak konsentrasi dan mikroorganisme yang hanyut bersama dengan laju aliran fluida. Misal diasumsikan semua parameter bernilai positif dan $m > D$, maka laju $\mathcal{K}(c)$ untuk nilai c besar menghasilkan konsentrasi yang lebih banyak daripada yang hanyut oleh perpindahan aliran fluida yang keluar dari Sistem. *(Herri Sulaiman, 2013).*

Jika laju kematian mikroorganisme sangat kecil dan diasumsikan dengan $\varepsilon = 0$,maka mikroorganisme yang punah karena hanyut dianggap mempunyai laju yang sama dengan laju punahnya nutrien. Oleh karena itu laju perpindahan dari organisme ini merupakan gabungan antara laju aliran nutrien dengan laju kematian organisme, *dengan demikian diperoleh* $\bar{D} = D$.

Variabel-variabel dimensional seperti pengenceran dengan satuan (liter/jam), volume medium kultur dan penyimpanan dengan satuan (liter), konsentrasi nutrien pada medium kultur dan media penyimpanan dengan satuan (gr/liter), konsentrasi dari kedua mikroorganisme dengan satuan (gr/liter) dapat diabaikan terlebih dahulu. Lebih lanjut Sistem (1.2) akan ditransformasi menjadi Sistem baru yang lebih sederhana dengan tujuan agar lebih mudah mencari solusi eksaknya. Variabel non dimensional yang dapat diukur yaitu konsentrasi nutrien dalam satuan c_0, *D dalam satuan* $\frac{B}{V}$, *t dalam satuan* $\frac{1}{D}$, *konsentrasi mikroorganisme* dalam satuan ηc_0, *sehingga variabel-variabel di Sistem (1.2) dapat dinyatakan dengan* $\bar{c} = \frac{c(t)}{c_0}$, $\bar{p} = \frac{p(t)}{\eta c_0}$, $\bar{D} = D_1 D$, *dan* $\bar{t} = \frac{t}{D}$.

Jadi, diperoleh model matematika baru yaitu :

$$\frac{dc}{dt} = 1 - c(t) - \mathcal{K}\big(c(t)\big)p(t),$$
$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{K}\big(c(t)\big)p(t) - Dp(t), \qquad \textbf{(1.3)}$$

dan diberikan nilai awal sebagai berikut,

$c(0) = c_0 > 0$, *dan* $p(0) = p_0 > 0$.

2. Model pertumbuhan untuk dua mikroorganisme berbeda jenis di medium kemostat.

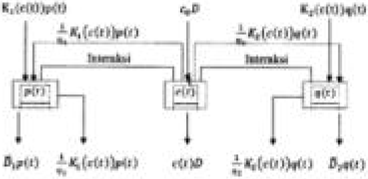
Kemostat yang berbentuk tabung (tank) terdiri dari media penyimpanan yang digunakan sebagai tempat cadangan nutrien, kemudian dihubungkan dengan sebuah pipa dan mengalir masuk ke dalam medium lain yang digunakan sebagai tempat untuk pertumbuhan dan perkembangan mikroorganisme dan dikenal dengan istilah medium kultur. Ke dalam medium kultur dimasukkan dua mikroorganisme yang saling berkompetisi (bersaing) untuk mendapatkan (mengkonsumi) makanan dengan satu nutrien yang sejenis. *Volume tabung dijaga agar tetap stabil dengan cara menambah nutrien yang berasal dari medium penyimpanan kemudian mengeluarkan limbah nutrien dan mikroorganisme.*

Dalam penulisan ini, *konsentrasi nutrien yang berada di dalam medium penyimpanan dinyatakan dengan* c_0, konsentrasi nutrien yang berada di dalam medium kultur pada waktu t dinyatakan dengan $c(t)$, *konsentrasi mikroorganisme pertama pada waktu t dinyatakan dengan* $p(t)$ *dan konsentrasi mikroorganisme ke dua pada waktu t dinyatakan dengan* $q(t)$.

Pengenceran (D) *merupakan laju aliran fluida yang keluar masuk Sistem dibagi dengan volume. Dimisalkan laju aliran fluida yang keluar masuk Sistem dinyatakan dengan F dan volume medium kultur dinyatakan dengan V, maka didapat* $D = \frac{F}{V}$.

Pengenceran pada kemostat dibagi menjadi dua macam yaitu laju aliran fluida yang mengandung c_0 *masuk ke dalam sistem dan dinyatakan dengan* c_0D *dan laju aliran fluida terdiri dari* $c(t)$, $p(t)$ *dan* $q(t)$ *keluar dari sistem, sehingga dapat dinyatakan sebagai* $c(t)D$, $\bar{D}_1p(t)$ *dan* $\bar{D}_2q(t)$ *dengan* $\bar{D}_1 = D + \varepsilon_1$ *dan* $\bar{D}_2 = D + \varepsilon_2$, *dengan* ε_1 *dan* ε_2 *merupakan laju kematian dari mikroorganisme pertama dan ke dua.*

Lebih lanjut η_1 *merupakan perubahan massa mikroorganisme pertama per unit waktu dibagi dengan massa nutrien yang di konsumsi per unit waktu dan* η_2 *merupakan perubahan massa mikroorganisme ke dua per unit waktu dibagi dengan massa nutrien yang konsumsi per unit waktu.* $\frac{1}{\eta_1}$ adalah konstanta pembanding laju pertumbuhan dari mikroorganisme pertama terhadap nutrien dan $\frac{1}{\eta_2}$ adalah konstanta pembanding laju pertumbuhan dari mikroorganisme ke dua terhadap nutrien.



Di dalam medium kultur, terjadi interaksi yaitu nutrien yang dikonsumsi oleh kedua mikroorganisme untuk mendukung laju pertumbuhannya terhadap waktu, yang dinyatakan dengan $K_1(c(t))p(t)$ dan $K_2(c(t))q(t)$. Untuk mempermudah dalam membentuk diagram transfer dari Sistem kemostat, akan dijelaskan terlebih dahulu siklus proses interaksi antara nutrien dengan kedua mikroorganisme.

Pada awalnya c_0D *masuk ke dalam medium kultur sebagai asupan nutrien yang berasal dari media penyimpanan. Lebih lanjut akan terjadi interaksi berupa* $c(t)$ *yang dimakan oleh* $p(t)$ dan $q(t)$. Hal ini berakibat konsentrasi $c(t)$ *akan berkurang sebesar* $\frac{1}{\eta_1}K_1(c(t))p(t)$ dan $\frac{1}{\eta_2}K_2(c(t))q(t)$, dengan demikian laju pertumbuhan dari kedua mikroorgansime akan terus meningkat terhadap waktu sebesar $K_1(c(t))p(t)$ dan $K_2(c(t))q(t)$.

Lebih lanjut, arus keluar akan membuang $c(t)$, $p(t)$ dan $q(t)$ sebesar $c(t)D$, $\bar{D}_1p(t)$ *dan* $\bar{D}_2q(t)$. *Selanjutnya siklus akan kembali ke tahapan semula yaitu nutrien yang berasal dari medium penyimpanan kembali masuk agar konsentrasi nutrien dan kedua mikroorganisme yang berada di dalam medium kultur dijaga tetap stabil.* Dengan demikian didapat diagram transfer untuk Sistem kemostat sebagai berikut :

Berdasarkan asumsi-asumsi dan diagram transfer yang telah dibentuk, didapat model pertumbuhan untuk dua mikroorganisme di media kemostat sebagai berikut

Jurnal Euclid, ISSN 2355-1712, vol.2, No.1, pp. 137-238

$$\frac{dc(t)}{dt} = \left(c_0 - c(t)\right)D - \frac{1}{\eta_1}K_1\left(c(t)\right)p(t) - \frac{1}{\eta_2}K_2\left(c(t)\right)q(t),$$
$$\frac{dp(t)}{dt} = p(t)\left[K_1\left(c(t)\right) - \bar{D}_1\right], \qquad \textit{(1.4)}$$
$$\frac{dq(t)}{dt} = q(t)\left[K_2\left(c(t)\right) - \bar{D}_2\right],$$

dan diberikan nilai awal sebagai berikut,

$c(0) = c_0 > 0,\quad p(0) = p_0 > 0,\ dan\ q(0) = q_0 > 0.$

Jika laju kematian mikroorganisme pertama dan ke dua sangat kecil dan diasumsikan dengan $\varepsilon_1 = 0$ dan $\varepsilon_2 = 0$, maka mikroorganisme yang hilang karena hanyut dianggap mempunyai laju yang sama dengan laju hilangnya nutrien. Oleh karena itu laju perpindahan dari organisme ini merupakan gabungan antara laju aliran nutrien dengan laju kematian organisme, *dengan demikian diperoleh* $\bar{D}_1 = \bar{D}_2 = D$.

Variabel-variabel dimensional seperti pengenceran dengan satuan (liter/jam), volume medium kultur dan penyimpanan dengan satuan (liter), konsentrasi nutrien pada medium kultur dan media penyimpanan dengan satuan (gr/liter), konsentrasi dari kedua mikroorganisme dengan satuan (gr/liter) dapat diabaikan terlebih dahulu. Lebih lanjut Sistem (3.1) akan ditransformasi menjadi Sistem baru yang lebih sederhana dengan tujuan agar lebih mudah mencari solusi eksaknya. Variabel non dimensional yang dapat diukur yaitu konsentrasi nutrien dalam satuan c_0, D_1 *dalam satuan* $\frac{\bar{D}_1}{D}$, D_2 *dalam satuan* $\frac{\bar{D}_2}{D}$, t *dalam satuan* $\frac{1}{D}$, *konsentrasi mikroorganisme pertama* dalam satuan $\eta_1 c_0$ dan *konsentrasi mikroorganisme ke dua* dalam satuan $\eta_2 c_0$, *sehingga variabel-variabel di Sistem (2.3) dapat dinyatakan dengan* $\bar{c} = \frac{c(t)}{c_0}$, $\bar{p} = \frac{p(t)}{\eta_1 c_0}$, $\bar{q} = \frac{q(t)}{\eta_2 c_0}$, $\bar{D}_1 = D_1 D$, $\bar{D}_2 = D_2 D$ *dan* $\bar{t} = \frac{t}{D}$.

Jadi, diperoleh model matematika baru yaitu :

$$\frac{dc}{dt} = 1 - c(t) - \mathcal{K}_1\left(c(t)\right)p(t) - \mathcal{K}_2\left(c(t)\right)q(t),$$
$$\frac{dp}{dt} = p(t)\left[\mathcal{K}_1\left(c(t)\right) - D_1\right], \qquad \textit{(1.5)}$$
$$\frac{dq}{dt} = q(t)\left[\mathcal{K}_2\left(c(t)\right) - D_2\right],$$

dan diberikan nilai awal

$c(0) = c_0 > 0,\quad p(0) = p_0 > 0,\ dan\ q(0) = q_0 > 0.$

Lebih lanjut diasumsikan fungsi respon $\mathcal{K}_i(c(t))$ *untuk* $i = 1,2$ sebagai berikut :

i. $\mathcal{K}_i : R_+ \to R_+$,
ii. $\mathcal{K}_i$ diferensiabel kontinu,
iii. $\mathcal{K}_i(0) = 0$,
iv. $\mathcal{K}_i(c)$ naik monoton pada R_+.

(Herri Sulaiman, 2013).

C. Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian dari latar belakang masalah di atas, dikemukakan rumusan masalah sebagai berikut :

1. Bagaimana eksistensi titik ekuilibrium dari model kemostat untuk satu dan dua mikroorgansime ?
2. Bagaimana kestabilan titik ekuilibrium dari model kemostat untuk satu dan dua mikroorganisme?
3. Bagaimana interpretasi kestabilan dari masing-masing titik ekuilibriumnya ?

D. Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk :

1. Mencari titik-titik ekuilibrium dari model kemostat untuk satu dan dua mikroorgansime.
2. Menyelidiki kestabilan titik-titik ekuilibrium pada model kemostat.
3. Menginterpretasikan kestabilan dari masing-masing titik ekuilibrium pada model kemostat.

E. Manfaat Penelitian

Dengan mengacu pada tujuan penelitian di atas, maka manfaat penelitian meliputi hal-hal berikut ini :

1. Penelitian ini dapat menjadi salah satu acuan dalam menyikapi keadaan lingkungan yang saat ini tercemar oleh zat-zat yang berbahaya khususnya di daerah lingkungan pertambangan.
2. Selain itu, penelitian ini juga dapat menjadi salah satu acuan dalam melihat pemodelan matematika untuk kasus- kasus yang serupa.

E. Tinjauan Pustaka

Penelitian ini mengkaji dan mengembangkan kembali jurnal yang ditulis oleh Herri Sulaiman (2013) yang menjelaskan mengenai model dan diagram transfer dari pemodelan matematika di medium kemostat untuk satu dan dua mikroorganisme. ABM Shahadat Hossain dan Chandra Nath Podder (2006) menjelaskan mengenai pemodelan di media kemostat untuk dua mikroorganisme yang saling berkompetisi untuk mendapatkan satu nutrien yang sejenis. Penelitian ini merupakan hasil pengembangan dari beberapa penelitian lain yang berhubungan dengan pemodelan untuk media kemostat. Salah satunya adalah HL. Smith (1995) dan JN. Kapoor (1985) di dalam bukunya membahas proses pembentukan model kemostat untuk satu mikroorganisme yang sejenis.

F. Metode Penelitian

Setelah dibentuk model matematika dengan memperhatikan fakta-fakta dan asumsi-asumsi yang ada, selanjutnya dicari solusi dari model. Kemudian dilakukan analisa dan interpretasi dari model.

Bentuk persamaan matematika dari model dirumuskan dengan memperhatikan diagram transfer yang menggambarkan interaksi nutrien dengan mikroorganisme. Model matematika yang dihasilkan berbentuk Sistem Persamaan Diferensial. Analisa yang dilakukan terhadap Sistem tersebut meliputi penentuan titik ekuilibrium dan analisa kestabilan titik ekuilibrium.

Jurnal Euclid, ISSN 2355-1712, vol.2, No.1, pp. 137-238

Penentuan titik ekuilibrium digunakan untuk menentukan kondisi steady state dari konsentrasi nutrien dan mikroorganisme agar dalam keadaan setimbang. Kestabilan dari titik ekuilibrium digunakan untuk melihat tingkah laku dari solusi-solusi di sekitar titik ekuilibrium dalam kaitannya dengan keadaan nutrien dan mikroorganisme untuk waktu yang cukup lama.

Konsep-konsep yang digunakan dalam analisa model matematika yang dihasilkan meliputi konsep fungsi diferensiabel kontinu, eksistensi dan ketunggalan solusi, titik ekuilibrium dan kestabilan titik ekuilibrium. Kestabilan titik ekuilibrium terdiri dari konsep linearisasi, matriks Jacobian. Persamaan karakteristik dan nilai eigen digunakan untuk menyelidiki kestabilan lokal dari masing-masing titik ekuilibrium model matematika yang dianalisa. Bagian real dari akar-akar persamaan karakteristik tersebut digunakan untuk menentukan kestabilan dari titik ekuilibrium model matematika yang dianalisa.

II. DASAR TEORI MATEMATIKA

A. Matriks

Himpunan matriks berukuran $n \times n$ yang elemen-elemennya berupa bilangan kompleks dinotasikan dengan $M_n(C)$.

Definisi 1 (Anton dan Rorres, 2005) *Vektor tak nol* $\mathbf{x} \in R^n$ *disebut vektor eigen dari matriks A jika memenuhi* $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ *untuk skalar* λ. *Skalar* λ *disebut dengan nilai eigen dari A.*

Definisi 2 *Polinomial karakteristik dari matriks* $A \in M_n(C)$ *ditulis dengan* $P_A(\lambda)$ *dan didefinisikan dengan* $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0$ *untuk* λ *adalah skalar. Persamaan* $P_A(\lambda) = det(\lambda I - A) = 0$ *disebut persamaan karakteristik.*

Definisi 3 (Perko, 1993) *Misalkan* $L(R^n)$ *menyatakan himpunan semua transformasi linear pada* R^n. *Diberikan fungsi* $\mathbf{f}: R^n \to R^n$, *dengan* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$. *Fungsi* $\mathbf{f}$ *dikatakan diferensiabel di* $\mathbf{x_0} \in R^n$ *jika terdapat suatu transformasi linear* $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0}) \in L(R^n)$ *yang memenuhi*

$$lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{x_0}+h) - \mathbf{f}(\mathbf{x_0}) - D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})h\|}{\|h\|} = 0.$$

Transformasi linear $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})$ *disebut derivatif* $\mathbf{f}$ *di titik* $\mathbf{x_0}$ *dan* $h \in R^n$.

Definisi 4 *Diberikan fungsi* $\mathbf{f}: \mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}^n$, *dengan E himpunan terbuka. Fungsi* $\mathbf{f}$ *dikatakan diferensiabel kontinu di* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$ *jika* $\mathbf{f}$ *diferensiabel di* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$ *dan derivatif parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *dengan* $i, j = 1,2..n$ *kontinu di* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$.

Selanjutnya, $\mathbf{f}$ *dikatakan diferensiabel kontinu pada E ditulis* $\mathbf{f} \in C'(\mathrm{E})$, *jika* $\mathbf{f}$ *diferensiabel kontinu di setiap* $\mathbf{x} \in \mathrm{E}$.

Teorema 5 *Diberikan* $\mathbf{f}: \mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n \longrightarrow \mathrm{R}^n$, *dengan E himpunan terbuka. Jika fungsi* $\mathbf{f}$ *diferensiabel di* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$, *maka derivatif parsial* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $i, j = 1,2..n$ *ada di* $\mathbf{x_0}$ *dan untuk setiap* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$ *berakibat* $D\mathbf{f}(\mathbf{x_0})\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_j}(\mathbf{x_0})x_j$ *dengan* $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ *dan* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T$.

Definisi 6 (Kocak, 1991) *Diberikan fungsi* $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ *pada Sistem (2.6) dengan* $f_i \in C^1(E)$, $i = 1,2,\ldots,n$, $E \subseteq R^n$, $i = 1,2,\ldots,n$. *Matriks*

$$J\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_1(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_2(\bar{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_2} \cdots & \frac{\partial f_n(\bar{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

dinamakan matriks Jacobian dari $\mathbf{f}$ *di titik* $\bar{\mathbf{x}}$.

Teorema 7 (Perko, 1993) *Diberikan* $\mathbf{f}: \mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$, E *himpunan terbuka. Fungsi* $\mathbf{f}$ *diferensiabel kontinu pada* E *jika dan hanya jika* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *dengan* $i, j = 1,2..n$ *ada dan kontinu kontinu pada* E.

Teorema 8 *Diberikan* $\mathbf{f}: \mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n \rightarrow \mathrm{R}^n$, E *himpunan terbuka. Jika fungsi* $\mathbf{f}$ *diferensiabel di* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$ *maka* $\mathbf{f}$ *kontinu di* $\mathbf{x_0} \in \mathrm{E}$. *Selanjutnya jika* $\mathbf{f}$ *diferensiabel pada* E, *maka* $\mathbf{f}$ *kontinu pada* E.

B. Sistem Persamaan Diferensial

Diberikan Sistem Persamaan Diferensial sebagai berikut

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (1)$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

dengan $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$ dan kondisi awal $x_i(t_0) = x_{i0}$, untuk $i = 1,2,\ldots,n$. Sistem (1) dapat ditulis sebagai $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. (2)

Definisi 9 (Perko, 1993) *Diberikan* $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n$, E *himpunan terbuka dan* $\mathbf{f} \in C(\mathrm{E})$. *Vektor* $\mathbf{x}(t)$ *disebut solusi Sistem persamaan diferensial (2) pada interval I jika* $\mathbf{x}(t)$ *diferensiabel pada I dan untuk setiap* $t \in I$ *berlaku* $\mathbf{x}(t) \in \mathrm{E}$ *dan* $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$.

Teorema 10 *Jika* $\mathrm{E} \subseteq \mathrm{R}^n$, *E himpunan terbuka*, $\mathbf{f} \in C^1(\mathrm{E})$ *dan* $x_0 \in E$ *maka terdapat* $a > 0$ *sehingga masalah nilai awal* $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *dengan* $x(0) = x_0$ *mempunyai penyelesaian tunggal* $\mathbf{x}(t)$ *pada interval* $[-a, a]$.

Definisi 11 (Olsder, 1994) *Titik* $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$ *disebut titik ekuilibrium Sistem (2) jika* $\mathbf{f}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Definisi 12 (Olsder, 1994) *Diberikan Sistem (2) dengan nilai awal* $x(t_0) = x_0 \in R^n$. *Titik ekuilibrium* $\bar{\mathbf{x}} \in R^n$ *dikatakan*

i. *Stabil lokal jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *terdapat* $\delta > 0$ *sedemikian sehingga untuk setiap solusi* $x(t)$ *yang memenuhi* $\|x(t_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta$ *berlaku* $\|x(t) - \bar{\mathbf{x}}\| < \varepsilon$ *untuk setiap* $t \geq t_0$.
ii. *Stabil asimtotik lokal jika titik ekuilibrium stabil dan terdapat* $\delta_0 > 0$ *sedemikian sehingga*

Jurnal Euclid, ISSN 2355-1712, vol.2, No.1, pp. 137-238

untuk setiap solusi $x(t)$ yang memenuhi $\|x(t_0) - \bar{\mathbf{x}}\| < \delta_0$ berlaku $\lim_{t\to\infty}\|x(t) - \bar{\mathbf{x}}\| = 0$

iii. *Tidak Stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi syarat pada (i).*

C. Linearisasi Sistem Persamaan Diferensial Non Linear

Definisi 13 *Sistem linear $\dot{\mathbf{x}} = Df(\bar{\mathbf{x}})\,(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})$ disebut linearisasi Sistem non linear (2) di sekitar titik $\bar{\mathbf{x}}$ dengan $Df(\bar{\mathbf{x}})$ merupakan matriks Jacobian dari $\mathbf{f}$ di titik $\bar{\mathbf{x}}$.*

Definisi 14 (Perko, 1993) *Titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dikatakan titik ekuilibrium hiperbolik dari Sistem (2) jika semua bagian real dari semua nilai eigen matriks Jacobian $Df(\bar{\mathbf{x}})$ tidak bernilai nol.*

Teorema 15 (Hahn, 1967) *Diberikan matriks Jacobian $Df(\bar{\mathbf{x}})$ dari Sistem non linear (2) dengan nilai eigen λ.*

1. *Titik ekuilibrium Sistem (2) stabil asimtotik lokal jika bagian real dari semua nilai eigen matriks Jacobian $Df(\bar{\mathbf{x}})$ bernilai negatif.*
2. *Titik ekuilibrium Sistem (2) tidak stabil jika terdapat paling sedikit satu nilai eigen matriks Jacobian $Df(\bar{\mathbf{x}})$ yang bagian realnya bernilai positif.*

Definisi 16 (Perko, 1993) *Suatu titik ekuilibrium $\bar{\mathbf{x}}$ dari Sistem (2) disebut sink jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian mempunyai bagian real negatif. $\bar{\mathbf{x}}$ disebut source jika semua nilai eigen dari matriks Jacobian mmpunyai begian real positif, dan $\bar{\mathbf{x}}$ disebut saddle jika $\bar{\mathbf{x}}$ adalah suatu titik ekuilibrium hiperbolik dan matriks Jacobian mempunyai paling sedikit satu nilai eigen dengan bagian real positif dan paling sedikit satu nilai eigen dengan bagian real negatif.*

III. PEMBAHASAN

1. Analisa Kestabilan dalam Model pertumbuhan untuk satu mikroorganisme sejenis di medium Kemostat.

Dari latar belakang permasalahan di atas telah diketahui bahwa model kemostat untuk satu mikroorgansime adalah :

$$\frac{dc}{dt} = 1 - c(t) - \mathcal{K}\big(c(t)\big)p(t),$$
$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{K}\big(c(t)\big)p(t) - Dp(t), \qquad \textbf{(1.6)}$$

dan diberikan nilai awal sebagai berikut,

$c(0) = c_0 > 0$, *dan* $p(0) = p_0 > 0$. Dengan $m > 0$, $a > 0$ dan diasumsikan bahwa fungsi respon $\mathcal{K}(c) = \frac{mc}{a+c}$ harus memenuhi :

i. $\mathcal{K}(0) = 0$,

ii. $\mathcal{K}(c)$ kontinu, terdiferensiabel dan $\mathcal{K}'(c) > 0$,

iii. $\mathcal{K}(c)$ mendekati nilai limit m untuk c menuju tak berhingga.

Berikut ini, akan diberikan teorema mengenai titik ekuilibrium dari model Sistem (1.6)

Teorema 3.1

i. *Sistem (1.6) mempunyai Titik Ekuilibrium* $E_1(1,0)$.

ii. *Jika* $\mathcal{K}(1) > D$, *maka Sistem (1.6) mempunyai Titik Ekuilibrium* $E_2\left(\bar{c}, \frac{1-\bar{c}}{D}\right)$ *dengan* $\bar{c}$ *memenuhi* $\mathcal{K}(\bar{c}) = D$.

Lebih lanjut, diberikan teorema mengenai kestabilan titik ekuilibrium dari model Sistem (1.6).

Teorema 3.2

Jika $\mathcal{K}(1) < D$, *maka Titik Ekulibrium* E_1 (1,0) *stabil asimtotik lokal.*

Teorema 3.3

Jika $\mathcal{K}(\bar{c}) - D < 0$ *maka titik ekuilibrium* $E_2\left(\bar{c}, \frac{1-\bar{c}}{D_1}\right)$ *stabil asimtotik lokal.*

2. Analisa Kestabilan dalam Model pertumbuhan untuk dua mikroorganisme berbeda jenis di medium Kemostat.

Dari latar belakang permasalahan di atas telah diketahui bahwa model kemostat untuk dua mikroorgansime adalah :

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= 1 - c(t) - \mathcal{K}_1(c(t))p(t) - \mathcal{K}_2(c(t))q(t), \\ \frac{dp}{dt} &= p(t)\left[\mathcal{K}_1(c(t)) - D_1\right], \\ \frac{dq}{dt} &= q(t)\left[\mathcal{K}_2(c(t)) - D_2\right], \end{aligned} \qquad (1.7)$$

dan diberikan nilai awal

$c(0) = c_0 > 0, \quad p(0) = p_0 > 0, \quad dan\ q(0) = q_0 > 0$.

Lebih lanjut diasumsikan fungsi respon $\mathcal{K}_i(c(t))$ *untuk* $i = 1,2$ sebagai berikut :

i. $\mathcal{K}_i : R_+ \to R_+$,
ii. $\mathcal{K}_i$ diferensiabel kontinu,
iii. $\mathcal{K}_i(0) = 0$,
iv. $\mathcal{K}_i(c)$ naik monoton pada R_+.

Berikut ini, diberikan teorema mengenai titik ekuilibrium dari model Sistem (1.7)

Teorema 3.4

i. *Sistem (1.7) mempunyai Titik Ekuilibrium* $E_1(1,0,0)$.

ii. *Jika* $\mathcal{K}_1(1) > D_1$, *maka Sistem (1.7) mempunyai Titik Ekuilibrium* $E_2\left(\bar{c}, \frac{1-\bar{c}}{D_1}, 0\right)$ *dengan* $\bar{c}$ *memenuhi* $\mathcal{K}_1(\bar{c}) = D_1$.

iii. *Jika* $\mathcal{K}_2(1) > D_2$, *maka Sistem (1.7) mempunyai Titik Ekuilibrium* $E_3\left(\bar{c}, 0, \frac{1-\bar{c}}{D_2}\right)$ *dengan* $\bar{c}$ *memenuhi* $\mathcal{K}_2(\bar{c}) = D_2$.

Lebih lanjut, diberikan teorema mengenai kestabilan titik ekuilibrium dari model Sistem (1.7).

Jurnal Euclid, ISSN 2355-1712, vol.2, No.1, pp. 137-238
©Prodi Pendidikan Matematika Unswagati Cirebon

Teorema 3.5

Jika $\mathcal{K}_i(1) < D_i$ *untuk* $i = 1,2$ *maka Titik Ekulibrium* E_1 (1,0,0) *stabil asimtotik lokal.*

Teorema 3.6

Jika $\mathcal{K}_2(\bar{c}) - D_2 < 0$ *maka Titik Ekuilibrium* $E_2\left(\bar{c}, \frac{1-\bar{c}}{D_1}, 0\right)$ *stabil asimtotik lokal.*

Teorema 3.7

Jika $\mathcal{K}_1(\bar{c}) - D_1 < 0$ *maka Titik Ekuilibrium* $E_3\left(\bar{c}, 0, \frac{1-\bar{c}}{D_2}\right)$ *stabil asimtotik lokal.*

IV. PENUTUP

A. Kesimpulan

Diberikan model Kemostat seperti pada Sistem Persamaan Model (1.6) dan (1.7). Dari pembahasan di atas dapat diambil kesimpulan sebagai berikut :

1. Jika $\mathcal{K}_i(1) < D_i$ untuk $i = 1,2$ *maka Titik Ekulibrium* E_1 (1,0,0) *stabil asimtotik lokal. Interpretasi hal tersebut jika :*

Laju pertumbuhan mikroorganisme pertama lebih kecil dari laju aliran fluida yang keluar dari Sistem.

Laju pertumbuhan mikroorganisme ke dua lebih kecil dari laju aliran fluida yang keluar dari Sistem. Pada awal waktu, proporsi nutrien selalu dekat dengan 1, dan proporsi dari mikroorganisme pertama dan kedua sangat sedikit,

maka untuk waktu yang cukup lama, mikroorganisme pertama dan ke dua akan habis dan nutrien akan terus berada di dalam medium kultur.

2. Jika $\mathcal{K}_2(\bar{c}) - D_2 < 0$ maka Titik Ekuilibrium $E_2\left(\bar{c}, \frac{1-\bar{c}}{D_1}, 0\right)$ *stabil asimtotik lokal. Interpretasi hal tersebut jika :*

Laju aliran fluida yang keluar dari Sistem lebih besar dari laju pertumbuhan mikroorganisme ke dua terhadap proporsi nutrien.

Pada awal waktu proporsi dari nutrien dekat dengan $\bar{c}$, proporsi mikroorganisme pertama dekat dengan $\frac{1-\bar{c}}{D_1}$ dan proporsi mikroorganisme kedua sangat sedikit,

maka untuk waktu yang cukup lama, proporsi nutrien akan mendekati $\bar{c}$ proporsi mikroorganisme pertama akan mendekati $\frac{1-\bar{c}}{D_1}$ *dan* mikroorganisme ke dua akan habis.

3. Jika $\mathcal{K}_1(\bar{c}) - D_1 < 0$ maka Titik Ekuilibrium $E_3\,(\bar{c}, 0, \frac{1-\bar{c}}{D_2})$ *stabil asimtotik lokal. Interpretasi hal tersebut jika :*

Laju aliran fluida yang keluar dari Sistem lebih besar dari laju pertumbuhan mikroorganisme pertama terhadap proporsi nutrien.

Pada awal waktu proporsi dari nutrien dekat dengan $\bar{c}$, proporsi mikroorganisme ke dua

Pada awal waktu proporsi dari nutrien dekat dengan $\bar{\varepsilon}$, proporsi mikroorganisme ke dua dekat dengan $\frac{1-\bar{\varepsilon}}{b_2}$ dan proporsi mikroorganisme pertama sangat sedikit,
maka untuk waktu yang cukup lama, proporsi dari nutrien akan mendekati $\bar{\varepsilon}$ proporsi dari mikroorganisme ke dua akan mendekati $\frac{1-\bar{\varepsilon}}{b_2}$ dan mikroorganisme pertama akan habis.

B. Saran

Pada bagian ini peneliti hanya menemukan titik ekuilibrium untuk kasus mikroorgansime atau nutrien yang akan punah. Belum di temukan titik ekuilibrium yang lain yaitu mikroorgansime yang hidup secara berdampingan dengan mikroorgansime dan nutrien lain. Lebih lanjut, perlu adanya penelitian mengenai analisa kestabilan global dan simulasi numerik dari tiap-tiap titik ekuilibrium yang telah ditemukan, agar lebih mengetahui perilaku Sistem model Kemostat dalam keadaan yang sebenarnya.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, H., 2004, *Aljabar Linear Elementer edisi kedelapan*. Jakarta : Erlangga.

Atlas, R.M., 2010, *Handbook of Microbiological Media*. USA : CRC Press.

Bingtuan Li dan Yang Kuang., 2000, Simple Food Chaid In A Chemostat With Distinct Removal Rates, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp : 75 - 92.

Enny, W., 2007, Pemanfaatan Bakteri Pereduksi Sulfat Untuk Bioremidiasi Tanah Bekas Tambang Batubara, *Biodiversitas Jurnal*, Volume 8, No.4, Halaman : 283 – 286.

Gantmacher, F.R., 1959, *The Theory of Matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, N.Y.

Hanh, W., 1967, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Inc., New York.

HL. Smith dan Paul W., 1995, *The Theory of The Chemostat* . Cambridge University Press.

Kapur, J.N., 1985, *Mathematical Models in Biology and Medicine*, Affliated East – West Press Pvt. Ltd. New Delhi.

Khalil, H.K., 2002, *Nonlinear System* (Third Edition), Prentice-Hall, Inc, New Jersey.

Luenberger, D.C., 1979, *Introduction to Dynamic Systems*, John Willey and Sons, Inc, United States.

Olsder, G.J., 1994, *Mathematical Systems Theory*, Delftse Uitgevers Matschappij b.v., Netherlands.