MODIFIKASI METODE RUNGE-KUTTA KUNTZMANN BERDASARKAN RATA-RATA PANGKAT P = 1/2

Andika Riski[1], Wartono[2]

[1] *Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Jl. Subrantas No. 55, Pekanbaru; andikariski33@gmail.com*

[2] *Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau, Jl. Subrantas No. 55, Pekanbaru; wartono@uin-suska.ac.id*

Abstrak

Metode Kuntzmann merupakan salah satu bentuk khusus dari metode Runge-Kutta orde empat yang di gunakan untuk menyelesaikan persoalan nilai awal. Penelitian ini membahas modifikasi metode Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat $p = 1/2$ untuk memperoleh varian baru metode Kuntzmann. Berdasarkan hasil kajian menunjukkan bahwa modifikasi metode Kuntzmann menggunakan rata-rata pangkat (MKunP) mempunyai galat pemotongan lokal sebesar $O(h^5)$. Simulasi numerik diberikan untuk menguji akurasi MKunP dengan menggunakan dua contoh persoalan nilai awal. Pada simulasi ini, galat mutlak MKunP dibandingan dengan metode Kuntzmann dan modifikasi metode Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik (MKunH). Hasil simulasi numerik menunjukkan bahwa metode MKunP lebih baik dibandingkan dengan MkunH.

Kata Kunci. Metode Kuntzmann, metode Runge-Kutta orde empat, persoalan nilai awal, rata-rata pangkat.

Abstract

Kuntzmann's method is one of the fourth-order Runge-Kutta methods used to solve initial value problems. This article discusses a modification of Kuntzmann's approach based on the power mean for p = ½ to get a new variant of the Kuntzmann method. The study results show that the modification of the Kuntzmann method using power mean (MkunP) has a local truncation error of $O(h^5)$. Numerical simulation is given to exam the accuracy of MkunP using two examples of the initial value problem. In this simulation, the error of MkunP is compared with the Kutnzmann method and modification of Kuntzmann using harmonic mean. The result of the numerical simulation shows that MkunP is better than MkunH.

Keywords. Kuntzmann method, fourth-order Runge-Kutta method, initial value problems, power means.

1. Pendahuluan

Persamaan diferensial merupakan model matematis yang muncul dari fenomena nyata bidang sains, teknik, dan rekayasa yang melibatkan peubahan beberapa variabel terhadap variabel lainnya (Burden &Faires, 2011; Chapra & Canale, 2015). Hampir sebagian besar, persamaan diferensial yang berasal dari persoalan nyata tersebut memuat bentuk-bentuk nonlinear yang cukup rumit dan kompleks. Hal ini mengakibatkan persamaan diferensial sulit ditemukan penyelesaian analitiknya. Oleh karena itu, penyelesaian alternatif yang digunakan adalah penyelesaian secara numerik, yaitu penyelesaian hampiran berupa langkah-langkah iterasi yang biasa disebut metode satu langkah.

Metode Runge-Kutta orde empat merupakan salah satu metode satu langkah yang paling sering digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial

$$y' = f(x,y),\ a \le x \le b, \tag{1}$$

dengan nilai awal $y(x_0) = y_0$.

Pada proses penyelesaian persoalan (1), metode Runge-Kutta orde empat tidak memerlukan turunan fungsi. Selain itu, metode Runge-Kutta orde empat menghasilkan galat yang relatif kecil dibandingkan dengan metode Euler, Heun dan metode Runge-Kutta orde tiga.

Secara umum, persamaan metode Runge-Kutta orde empat ditulis

$$y_{n+1} = y_n + \sum_{i=1}^{4} a_i k_i, \tag{2}$$

dengan

$$k_1 = hf\left(x_n, y_n\right), \tag{3.a}$$

$$k_2 = hf\left(x_n + c_1 h, y_n + q_{11} k_1\right), \tag{3.b}$$

$$k_3 = hf\left(x_n + c_2 h, y_n + q_{21} k_1 + q_{22} k_2\right), \tag{3.c}$$

$$k_4 = hf\left(x_n + c_3 h, y_n + q_{31} k_1 + q_{32} k_2 + q_{33} k_3\right). \tag{3.d}$$

Berdasarkan nilai parameter bebasnya, metode Runge-Kutta orde empat (RK-4) memiliki beberapa bentuk, diantaranya: RK-4 Klasik, RK-4 Kutta, RK-4 Gill dan RK-4 Kuntzmann (Lapidus & Seifeld, 1971).

Beberapa persoalan nilai awal yang diselesaikan menggunakan Metode Runge Kutta orde empat diantaranya: sistem induksi magnetik dan persamaan Navier-Stokes (Liu & Zo, 2006), jaringan syaraf tiruan (Polanagusamy & santhikumar, 2007), sistem mangsa-pemangsa (Wang & Liu, 2009), persamaan Schrodinger (Malawi dkk, 2010), model imunologi seluler pada tuberkulosis (Pratiwi & Yudhi, 2019), dan rangkaian RLC (Gusa, 2014).

Pada saat ini, sejumlah peneliti telah modifikasi metode Runge-Kutta orde empat (2) menggunakan berbagai jenis rata-rata untuk untuk menghasilkan bentuk lain dari metode Runge-Kutta orde empat, seperti rata-rata geometri (Evans, 1991; Suryani dkk, 2020), rata-rata harmonik (Sanugi & Evans, 1994; Wartono dkk, 2019), rata-rata kontra-harmonik (Evans & Yaakub, 1995), rata-rata heronian (Evans & Yaacob, 1995), rata-rata Lehmer (Ulfa & Wartono, 2019), dan rata-rata pangkat (Muda dkk, 2019).

Pada artikel ini, penulis memodifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kuntzmann dengan menggunakan rata-rata pangkat untuk p = ½. Selanjutnya, untuk menguji performa metode baru, diberikan simulasi numerik dengan menggunakan dua persamaan diferensial. Pada simulasi ini, metode baru diimplementasikan untuk menyelesaikan dua persamaan diferensial tersebut, dan galat yang dihasilkan dibandingkan dengan dua metode lainnya.

2. Hasil dan Diskusi

2.1 Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat Bentuk Kuntzmann

Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kuntzmann, dimulai dengan mempertimbangkan kembali persamaan metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann dalam bentuk

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{360}\left(55k_1 + 125k_2 + 125k_3 + 55k_4\right). \tag{4}$$

Persamaan (4) dapat diubah menjadi metode RK-4 Kutzmann yang memuat bentuk rata-rata aritmetik

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{36}\left(\frac{11(k_1 + k_2)}{2} + \frac{14(k_2 + k_3)}{2} + \frac{11(k_3 + k_4)}{2}\right) \tag{5}$$

Untuk mengganti bentuk rata-rata aritmetik, pertimbangkan kembali rata-rata pangkat untuk p = ½ dalam bentuk

$$M_{1/2}(k_i,k_{i+1})=\frac{1}{2}\left(\frac{k_i+k_{i+1}}{2}+\sqrt{k_i k_{i+1}}\right),\ i=1,2,3. \tag{6}$$

Selanjutnya, bentuk rata- rata aritmatik $\frac{k_i+k_{i+1}}{2},\ i=1,\ 2,\ 3$ pada Persamaan (5) diganti dengan bentuk rata-rata pangkat pada Persamaan (6) sehingga Pesamaan (5) menjadi

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{72}\left(\frac{11(k_1+k_2)}{2}+\frac{14(k_2+k_3)}{2}+\frac{11(k_3+k_4)}{2}+11\sqrt{k_1k_2}+14\sqrt{k_2k_3}+11\sqrt{k_3k_4}\right) \tag{7}$$

dengan

$$k_1=f(y_i), \tag{8.a}$$

$$k_2=f(y_i+hq_{11}k_1), \tag{8.b}$$

$$k_3=f(y_i+h(q_{21}k_1+q_{22}k_2)), \tag{8.c}$$

$$k_4=f(y_i+h(q_{31}k_1+q_{32}k_2+q_{33}k_3)). \tag{8.d}$$

Persamaan (7) merupakan modifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kuntzmann dengan enam konstanta yang tidak diketahui.

Untuk mendapatkan nilai enam konstanta yang tidak diketahui, jabarkan k_1, k_2, k_3 dan k_4 ke dalam bentuk deret Taylor, lalu substitusikan ke Persamaan (7) maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
y_{i+1}=y_i+hf&+\left(\frac{25q_{11}+25c_2+11c_3}{72}\right)h^2ff_y+h^3\left(\frac{25q_{11}^2+25c_2^2+11c_3^2}{144}\right.\\
&\left.+\left(\frac{22c_2c_3-25q_{11}^2-11c_3^2}{576}+\frac{q_{11}(100q_{22}+44q_{32}+14c_2)+44c_2q_{33}}{288}\right)ff_y^2\right)\\
&+h^4\left(\frac{25q_{11}^3+25p_2^3+11p_3^3}{432}f^3f_{yyy}+\left(\frac{11p_2p_3^2+11p_2^2p_3-11p_3^3-25p_2^3}{576}\right.\right.\\
&+\frac{-25q_{11}^3+14c_2q_{11}^2+14c_2^2q_{11}}{576}+\frac{22c_2^2q_{33}+100c_2q_{11}q_{22}+44c_3q_{11}q_{32}}{288}\\
&\left.+\frac{44c_2c_3q_{33}+50q_{11}^2q_{22}+22q_{11}^2q_{32}}{288}\right)f^2f_yf_{yy}+\left(\frac{11c_3^3+25c_2^3+25q_{11}^3-11c_2^2c_3}{1152}\right.\\
&+\frac{-11c_2c_3^2-14c_2q_{11}^2-14c_2^2q_{11}}{1152}+\frac{11c_2^2q_{33}+14q_{11}^2q_{22}-11c_2c_3q_{33}+11c_2q_{11}q_{32}}{288}\\
&\left.\left.+\frac{11c_3q_{11}q_{22}-11c_3q_{11}q_{32}-25c_2q_{11}q_{22}+44q_{11}q_{22}q_{33}}{288}\right)ff_y^3\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

Perbandingan koefisien antara Persamaan (9) dengan deret Taylor orde empat,

$$y_{i+1}=y_i+hf+\frac{h^2}{2}ff_y+\frac{h^3}{6}\left(ff_y^2+f_{yy}f^2\right)+\frac{h^4}{24}\left(f^3f_{yyy}+4f^2f_yf_{yy}+ff_y^3\right) \tag{10}$$

menghasilkan enam persamaan dalam bentuk,

$$\frac{25q_{11}+25c_2+11c_3}{72}=\frac{1}{2}, \tag{11.a}$$

$$\frac{25q_{11}^2+25c_2^2+11c_3^2}{144}=\frac{1}{6}, \tag{11.b}$$

$$\frac{22c_2c_3-25q_{11}^2-11c_3^2}{576}+\frac{q_{11}\left(100q_{22}+44q_{32}+14c_2\right)+44c_2q_{33}}{288}=\frac{1}{6}, \tag{11.c}$$

$$\frac{25q_{11}^3+25c_2^3+11c_3^3}{432}=\frac{1}{24}, \tag{11.d}$$

$$\frac{11c_2c_3^2+11c_2^2c_3-11c_3^3-25c_2^3+-25q_{11}^3}{576}+\frac{14c_2q_{11}^2+14c_2^2q_{11}}{576}$$
$$+\frac{22c_2^2q_{33}+100c_2q_{11}q_{22}+44c_3q_{11}q_{32}}{288}+\frac{44c_2c_3q_{33}+50q_{11}^2q_{22}+22q_{11}^2q_{32}}{288}=\frac{1}{6}, \tag{11.e}$$

$$\frac{11c_3^3+25(c_2^3+q_{11}^3)-11(c_2^2c_3+c_2c_3^2)-14(c_2q_{11}^2+c_2^2q_{11})}{1152}$$
$$+\frac{11c_2^2q_{33}+14q_{11}^2q_{22}-11c_2c_3q_{33}+11c_2q_{11}q_{32}}{288}$$
$$+\frac{11c_3q_{11}q_{22}-11c_3q_{11}q_{32}-25c_2q_{11}q_{22}+44q_{11}q_{22}q_{33}}{288}=\frac{1}{24}. \tag{11.f}$$

Oleh karena Persamaan (11.a) – (11.f) melibatkan delapan konstanta, maka berdasarkan metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kuntzmann, di ambil $c_2={}^3\!/_5$ dan $c_3=1$ dan dengan menyelesaian secara serentak diperoleh nilai-nilai konstanta

$$q_{11}=\frac{2}{5}, q_{21}=\frac{309-3\sqrt{26059}}{1000},\ q_{22}=\frac{291+3\sqrt{26059}}{1000}, q_{31}=\frac{-966+7\sqrt{26059}}{440},$$
$$q_{32}=\frac{1149}{220}-\frac{3\sqrt{26059}}{88}, q_{33}=\frac{-223+2\sqrt{26059}}{110}.$$

Selanjutnya substitusikan nilai q_{11}, q_{21}, q_{22}, q_{31}, q_{32}, dan q_{33} ke Pesamaan (8.a) – (8.d) sehingga diperoleh modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat $p=1/2$ dengan bentuk sebagai berikut

$$y_{i+1}=y_i+\frac{h}{36}\left(\frac{11\left(k_1+k_2\right)}{2}+\frac{14\left(k_2+k_3\right)}{2}+\frac{11\left(k_3+k_4\right)}{2}+11\sqrt{k_1k_2}+14\sqrt{k_2k_3}+11\sqrt{k_3k_4}\right) \tag{12}$$

dengan

$$k_1=f(y_i), \tag{13.a}$$

$$k_2 = f\left(y_i + \frac{2}{5} h k_1 \right), \tag{13.b}$$

$$k_3 = f\left(y_i + \frac{h}{1000}\left((309 - 3\sqrt{26059})k_1 + (291 + 3\sqrt{26059})k_2 \right) \right), \tag{13.c}$$

$$k_4 = f\left(y_i + \frac{h}{440}\left((-966 + 7\sqrt{26059})k_1 + (2298 - 15\sqrt{26059})k_2 + (892 + 8\sqrt{26059})k_3 \right) \right), \tag{13.d}$$

Galat Persamaan (12) diperoleh dengan mensubstitusikan k_1, k_2, k_3 dan k_4 pada Persamaan (13.a) - (13.d) ke dalam deret Taylor sampai orde lima, dan kemudian substitusikan kembali ke (12) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} y_{i+1} = {} & y_i + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + h^3\left(\frac{1}{6} ff_y^2 + \frac{1}{6} f_{yy} f^2 \right) + h^4\left(\frac{1}{24} f^3 f_{yyy} + \frac{1}{6} f^2 f_y f_{yy} + \frac{1}{24} ff_y^3 \right) \\ & + h^5\left(\frac{31}{3600} f^4 f_{yyyy} + \left(\frac{2799}{40000} - \frac{7\sqrt{26059}}{90000} \right) f_{yyy} f_y f^3 + \left(\frac{\sqrt{26059}}{750} + \frac{849}{80000} \right) f_{yy}^2 f^3 \right. \\ & \left. + \left(\frac{6855687}{44000000} - \frac{10603\sqrt{26059}}{33000000} \right) f_{yy} f_y^2 f^2 + \left(-\frac{1682113}{105600000} + \frac{223\sqrt{26059}}{3300000} \right) f_y^4 f \right). \\ & + O(h^6) \end{aligned} \tag{14}$$

Selanjutnya pertimbangkan kembali ekspansi deret Taylor sampai orde lima sebagai berikut

$$\begin{aligned} y_{i+1} = {} & y_i + hf + \frac{h^2}{2} ff_y + \frac{h^3}{6}\left(ff_y^2 + f_{yy} f^2 \right) + \frac{h^4}{24}\left(f^3 f_{yyy} + 4 f^2 f_y f_{yy} + ff_y^3 \right) \\ & + \frac{h^5}{120}\left(f^4 f_{yyyy} + 11 f^2 f_y^2 f_{yy} + 4 f^3 f_{yy}^2 + 7 f^3 f_y f_{yyy} + ff_y^4 \right) \end{aligned} \tag{15}$$

Berdasarkan Persamaan (14) dan (15), diperoleh galat pemotong lokal dari modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata pangkat sebagai berikut

$$\begin{aligned} Galat = {} & \frac{h^5}{1584000000}\left(440000 f^4 f_{yyyy} + \left(101604732 - 508944\sqrt{26059} \right) f^2 f_y^2 f_{yy} \right. \\ & + \left(-35989800 + 211200\sqrt{26059} \right) f^3 f_{yy}^2 + \left(18440400 - 123200\sqrt{26059} \right) f^3 f_y f_{yyy} \\ & \left. + \left(-38431695 + 107040\sqrt{26059} \right) ff_y^4 \right). \end{aligned} \tag{16}$$

2.2 Simulasi Numerik

Pada bagian ini, simulasi numerik diberikan dengan menggunakan dua contoh persoalan nilai awal orde satu. Komputasi program menggunakan MatLab versi 6.5 dan nilai-nilai galat hasil komputasi ditampilkan sebanyak empat digit desimal. Selanjutnya, galat mutlak yang dihasilkan pada kasus dari metode Kuntzmann menggunakan rata-rata pangkat (MKunP) pada Persamaan (14) dibandingkan dengan metode Kuntzmann (MKun) (Lapidus & Seifeld, 1971), dan dan metode Kuntzmann dengan rata-rata harmonik (RKKunH) (Mirna, 2013).

Kasus 1.
Diberikan persoalan nilai awal,

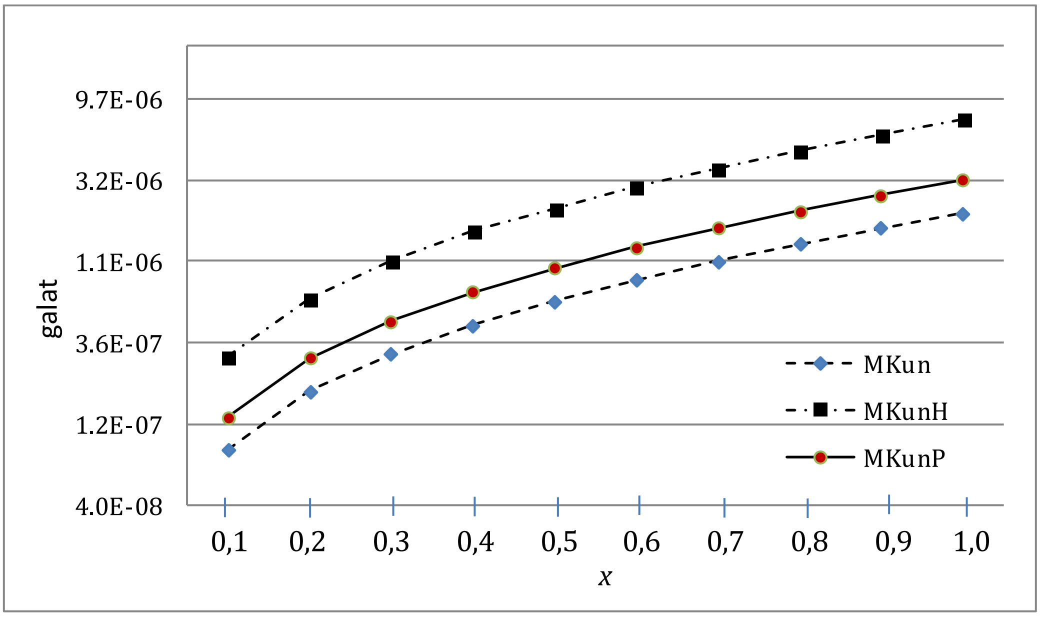
$$y' = y,\ y(0) = 1,\ 0 \le x \le 1, \tag{17}$$

dengan solusi eksak $y = e^x$. Galat pemotongan dari persoalan nilai awal orde satu (17) yang dihitung dengan menggunakan nilai awal $y(0) = 1$ dan lebar langkah $h = 0{,}1$ untuk Mkun, MkunH dan MkunP diberikan pada Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Perbandingan galat pada kasus 1 dengan h = 0,1

i	x	*Galat*		
		MKun	MKunH	MKunP
1	0,10	8,47423 (e – 08)	3,00002 (e – 07)	1,32200 (e – 07)
2	0,20	1,87309 (e – 07)	6,63117(e – 07)	2,92208 (e – 07)
3	0,30	3,10513 (e – 07)	1,09937 (e – 06)	4,84410 (e – 07)
4	0,40	4,57561 (e – 07)	1,61983 (e – 06)	7,13807 (e – 07)
5	0,50	6,32103 (e – 07)	2,23784 (e – 06)	9,86099 (e – 07)
6	0,60	8,38299 (e – 07)	2,96775 (e – 06)	1,30777 (e – 06)
7	0,70	1,08087 (e – 06)	3,82652 (e – 06)	1,68619 (e – 06)
8	0,80	1,36520 (e – 06)	4,83307 (e – 06)	2,12975 (e – 06)
9	0,90	1,69738 (e – 06)	6,00900 (e – 06)	2,64795 (e – 06)
10	1,00	2,08432 (e – 06)	7,37896 (e – 06)	3,25160 (e – 06)

Selanjutnya, nilai-nilai galat dari metode yang dibandingkan pada Tabel 1 diplot sebagaimana ditampilkan pada Gambar 1 berikut.



Gambar 1. Galat dari Mkun, MkunH dan MkunP dengan $h = 0{,}1$.

Gambar 1 memperlihatkan bahwa galat pemotongan lokal yang dihasilkan oleh MkunP lebih kecil dari MkunH, tetapi lebih besar dari Mkun. Hal ini menunjukkan bahwa MkunP lebih akurat dalam menyelesaikan persoalan nilai awal (17) dibandingkan dengan MkunH.

Kasus 2.

Diberikan persoalan nilai awal

$$y' = \frac{1}{y}, \;\; y(0) = 1, \; 0 \le x \le 1, \tag{18}$$

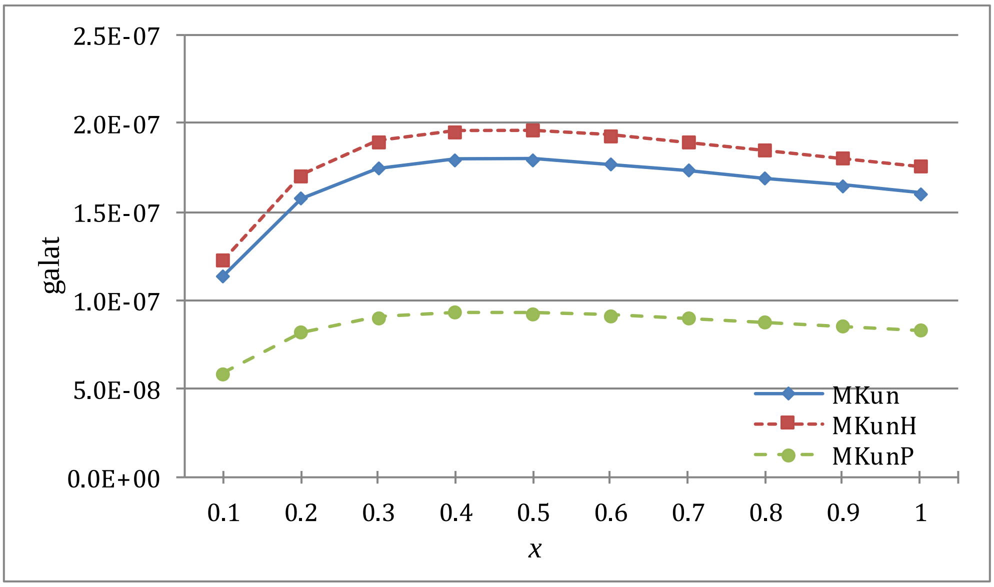
dengan solusi eksak $y = \sqrt{2x+1}$. Galat pemotongan dari kasus 1 dengan menggunakan nilai awal $y(0) = 1$ dan lebar langkah $h = 0{,}1$ untuk Mkun, MkunH dan MkunP diberikan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Perbandingan galat untuk kasus 2 dengan $y(0) = 1$ dan $h = 0{,}1$.

i	*x*	*Galat*		
		MKun	MKunH	MKunP
1	0,10	1,13911 (e – 07)	1,22877 (e – 07)	5,91826 (e – 08)
2	0,20	1,57921 (e – 07)	1,71079 (e – 07)	8,19077 (e – 08)
3	0,30	1,74810 (e – 07)	1,89909 (e – 07)	9,05656 (e – 08)
4	0,40	1,80040 (e – 07)	1,95969 (e – 07)	9,32034 (e – 08)
5	0,50	1,79941 (e – 07)	1,96127 (e – 07)	9,31015 (e – 08)
6	0,60	1,77347 (e – 07)	1,93480 (e – 07)	9,17228 (e – 08)
7	0,70	1,73609 (e – 07)	1,89542 (e – 07)	8,97637 (e – 08)

8	0,80	1,69404 (e – 07)	1,85053 (e – 07)	8,75701 (e – 08)
9	0,90	1,65076 (e – 07)	1,80402 (e – 07)	8,53184 (e – 08)
10	1,00	1,60804 (e – 07)	1,75791 (e – 07)	8,30991 (e – 08)

Nilai-nilai galat dari metode yang dibandingkan pada Tabel 2 diplot sebagaimana diberikan pada Gambar 2.



Gambar 2. Ggalat Mkun, MkunH dan MkunP untuk $y' = 1/y$ dengan h = 0,1.

Gambar 2 memperlihatkan bahwa galat yang dihasilkan oleh MkunP lebih kecil dibandingkan dengan metode lainnya. Hal I ni menunukkan bahwa MkunP mempunyai akurasi yang lebih baik dalam menyelesaikan persoalan nilai awal (18) dibandingkan dengan Mkun dan MkunH.

3. Kesimpulan

Berdasarkan simulasi numerik yang diterapkan pada 2 contoh persamaan diferensial biasa orde satu yang diselesaikan mengunakan metode RKKu, RKKuCoh, RKKuH, dan RKKuP diperoleh bahwa pada Contoh 4.1 dengan persamaan $y' = y$ metode RKKu lebih baik dibandingkan dengan metode RKKuCoH, RKKuH, dan RKKuP. Kemudian dengan persamaan $y' = 1/y$ metode RKKuP lebih baik dibandingkan metode RKKu, RKKuCoH maupun RKKuH, karena memiliki galat yang relatif kecil.

Daftar Pustaka

Burden, R. L., dan Faires, J. D., *Numerical Analysis*, Penerbit Cengage Learning, Boston, 2011, pp. 259 – 264.

Chapra, S. C., dan Canale, R. P., *Numerical Methods for Engineers*, Penerbit McGraw Hill, New York, 2015, pp. 699 – 704.

Evans, D. J., 1991. A new 4th order Runge-Kutta method for initial value problems with error control, *International Journal of Computer Mathematics*, **39**, 217 – 227.

Evans, D. J., dan Yaakub, A. R., 1995. A new fourth order Runge-Kutta formula based on the contra-harmonic (C_0M) mean, *International Journal of Computer Mathematics*, **57**, 249 – 256.

Evans, D. J., dan Yaacob, N., 1995. A fourth order Runge-Kutta mehod based on the heronian mean formula, *International Journal of Computer Mathematics*, **58**, 103 – 115.

Gusa, R. K., 2014. Penerapan metode Runge-Kutta orde 4 dalam analisis rangkaian RLC, *Jurnal ECOTIPE*, **1**(2), 47 – 52.

Lapidus, L., dan Seinfeld, J. H., *Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, Penerbit Academic Press, New York, 1971, pp. 1 – 3.

Liu, H., dan Zou, J., 2006. Some new additive Runge-Kutta methods and their applications, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **190**, 74 – 98.

Mirna, 2013. Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat Kuntzmann berdasarkan rata-rata harmonik, *Skripsi Program Studi Matematika Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau*, Pekanbaru.

Mowlawi, A. A., Binesh, A., dan Arabshabi, H., 2010. Application of Runge-Kutta numerical methods to solve the Schrodinger equation for hydrogen and positronium atoms, *Research Journal of Applied Sciences*, **5**(5), 315 – 319.

Muda, Y., Wartono, W., dan Sarah, H., A new fourth-order Runge-Kutta method based on the power mean", *Proceedings of the 34th International Business Information Management Association Conference 2019 (43th IBIMA 2019),* 13 – 14 November, Madrid, Spain, pp. 5640 – 5648.

Pratiwi, R. R., Helmi, dan Yudhi, 2019. Penyelesaian model imunologi seluler pada tuberkulosis dengan metode *extended* Runge-Kutta orde empat dan Runge-Kutta orde empat, *Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya (Binmaster)*, **8**(3), 495 – 504.

Ponalagusamy, R., dan Senthikumar, S., Investigation on multilayer raster cellular neural network by arithmetic and heronian mean, *Procceding of the World Congress on Engineering 2007*, July 2- 4, London, UK, pp.713-718.

Suryani, I., Roni, Wartono, dan Muda, Y., 2020. Modifikasi metode Runge-Kutta orde 4 bentuk Kutta dengan rata-rata geometri, *KUBIK Jurnal Publikasi Ilmiah Matematika*, **4**(2), 221 – 230.

Sanugi, B. B., dan Evans, D. J., 1994. A new fourth order Runge-Kutta formula based on the harmonic mean, *International Journal of Computer Mathematics*, **50**, 113 – 118.

Ulfa, F., dan Wartono, Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat klasik menggunakan kombinasi deret Lehmer dengan p = 1 dan p = 4, *Prosiding Seminar MIPA dan Kesehatan 2019*, 22 Agustus, Pekanbaru, Indonesia, pp. 7 – 15

Wang, Q., dan Liu, M. Z., 2009. Stability and Neimark-Sacker bifurcation in Runge-Kutta methods for a predator-prey system, *International Journal of Computer Mathematics*, **86**(12), 2218 – 2224.

Wartono, Putri, E., Soleh, M., Suryani, I., dan Aprijon, Modifikasi metode Runge-Kutta orde empat bentuk Kutta menggunakan rataan harmonik, *Prosiding Seminar Nasional Teknologi Informasi Komunikasi dan Industri (SNTIKI) XI 2019*, 12 November, Pekanbaru, Indonesia, pp. 433 – 438.